EXAMEN DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I
UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. ABRIL 2014

Realizar las preguntas en hojas separadas, indicando explícitamente todas las fórmulas que se utilicen.

Tanto el alumno que copie como el que se deje copiar no podrá examinarse hasta el próximo curso.

Duración: 1 hora.
Puntuación: Todas las preguntas tienen la misma puntuación.

1. Pablo no tiene *WhatsApp* de modo que el número de SMS que envía se distribuye según una Poisson de media 5 mensajes al día. El día que envía 3 o más mensajes, su operador le cobra un plus de 1 euro. ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 7 días el operador le cobre exactamente 4 euros de plus?

2. Ana ve solamente la televisión un día a la semana: los sábados con probabilidad 0.45 y los domingos con probabilidad 0.55. Si es sábado, el tiempo que la ve se distribuye según una Normal de media 3 horas y desviación típica 1.2 horas. Si es domingo, la ve un tiempo que se distribuye exponencialmente con media 2.7 horas. La semana pasada Ana vio la televisión más de 2 horas. Calcula la probabilidad de que la viera el sábado.

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. ABRIL 2014

1. Para poder calcular la probabilidad pedida, definimos la v.a.

$$X = \textit{número de días que le cobran un plus de entre los 7 días} \;\sim\; B(7,p)$$

donde p es la probabilidad de que le cobren un plus un día, es decir, la probabilidad de que en un día envíe 3 o más mensajes. Definimos la v.a.

$$N = \textit{número de mensajes enviados al día} \;\sim\; \mathcal{P}(5)$$

con lo que la probabilidad de que le cobren un plus un día cualquiera será:

$$\begin{aligned} p = P(N \geq 3) &= 1 - P(N=0) - P(N=1) - P(N=2) = \\ &= 1 - e^{-5} - 5e^{-5} - \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 1 - 18.5e^{-5} = \\ &= 1 - 0.124 = 0.876 \end{aligned}$$

Así, $X \sim B(7, 0.876)$, y como nos piden la probabilidad de que en 7 días le cobren 4 días un plus (4 euros), debemos calcular:

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \binom{7}{4}(0.876)^4(1-0.876)^3 = \\ &= 35(0.876)^4(0.124)^3 = \\ &= 0.0392 \end{aligned}$$

2. Sean los sucesos

$$\begin{aligned} S &= \textit{Ana ve la TV el sábado} \qquad P(S) = 0.45 \\ D &= \textit{Ana ve la TV el domingo} \qquad P(D) = 0.55 \\ A &= \text{ver la tele más de 2 horas} \end{aligned}$$

y las variables aleatorias

$$\begin{aligned} T_S &= \textit{tiempo que Ana ve la TV el sábado (en horas)} \sim N(3, 1.2) \\ T_D &= \textit{tiempo que Ana ve la TV el domingo (en horas)} \sim exp(\lambda) \end{aligned}$$

donde $\lambda = \frac{1}{2.7} = 0.37$ ya que $E(T_D) = \frac{1}{\lambda} = 2.7$.

Nos piden $P(S|A)$, que se calcula aplicando el teorema de Bayes:

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A|D)P(D)}$$

Se calculan primero las probabilidades condicionadas:

$$P(A|S) = P(T_S > 2) = P\left(\frac{T_S - 3}{1.2} > \frac{2-3}{1.2}\right) = P(Z > -0.83) = P(Z < 0.83) = 0.7967$$

donde $Z \sim N(0,1)$.

$$P(A|D) = P(T_D > 2) = 1 - P(T_D \leq 2) = 1 - F_{T_D}(2) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2.7}2}) = e^{-\frac{1}{2.7}2} = 0.477$$

en el último resultado hemos utilizado que la función de distribución de la distribución exponencial es $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Sustituyendo se obtiene:

$$P(S|A) = \frac{0.7967 \cdot 0.45}{0.7967 \cdot 0.45 + 0.477 \cdot 0.55} = 0.577$$